# הגדרה

יהי R יחס בקבוצה A. אומרים ש:

1. R יחס רפלקסיבי אם לכל מתקיים
2. R יחס אנטי סימטרי אם לכל אזי אם וגם אז בהכרח
3. R יחס סימטרי אם לכל אם אז
4. R יחס טרנזיטיבי אם לכל אם וגם אזי

יחס סדר חלקי

# הגדרה

יחס S מעל קבוצה A נקרא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי.

## דוגמאות:

- היחסים

בקבוצות: , P(A) זו קבוצת החזקה. נקרה יחס סדר:  
רפלקסיביות: לפי הגדרה של הכלה של קבוצות לכל קבוצה B, . לכל קבוצה B ששייכת ל מתקיים גם לכן לכל קבוצה B ששייכת לP(A) מתקיים   
טרנזיטיביות: לכל אם ו אז מתקיים בהכרח ש  
אנטי סימטריות: לכל אם וגם אז מתקיים בהכרח ש

# תרגיל

הראה שעבור הקבוצה מתקיים יחס סדר חלקי כפי שהראנו קודם

## פתרון

נשים לב שהקבוצות לא נתנות להשוואה ולא מוכלות אחת בשניה ובפרט לא מתקיים האנטי סימטריות.

יחס סדר מלא

# הגדרה

סדר חלקי S מעל קבוצה A נקרא סדר מלא אם הוא משווה בין כל שני איברים של A, כלומר

### דוגמאות

וגם

ליחס סדר מלא צריך להוסיף - בנוסף לטרנזיטיביות, רפלקסיביות ואנטי-סימטריות - קריטריון השוואה. לכל מתקיים או

# איבר מינימלי

יהי S יחס סדר חלקי מעל A, . אם לא קיים כך ש אז a איבר מינימלי

## דוגמאות

האיבר המינימלי בP(A) שהגדרנו קודם הוא . בקבוצה כל יחידון הוא איבר מינימלי.  
 – לא קיים איבר מינימלי, לכל קיים

# איבר מקסימלי

איבר נקרא איבר מקסימלי אם לא קיים כך ש.

## דוגמאות

- אין איבר מקסימלי  
 – האיבר המקסימלי הוא B

# משפט

בכל קבוצה סדורה חלקית וסופית קיים איבר מינימלי ומקסימלי

## הוכחה

טענה: יהי R יחס טרנזיטיבי מעל A. יהיו האיברים נגדיר שמתקיים . אז מתקיים ש

הוכחה של הטענה: באינדוקציה על m

בסיס האינדוקציה: יהיו כך ש אז

הנחת האינדוקציה: יהיו כך ש אז

הוכחת האינדוקציה: יהיו כך ש. לפי הנחת האינדוקציה ומכיוון ש נקבל שלפי הטרנזיטיביות

הוכחה של המשפט: יהי S יחס סדר חלקי מעלה הקבוצה A, . נניח בדרך השלילה שלא קיים איבר מינימלי. יהי . כיוון שע"פ ההנחה לא קיים איבר מינימלי אז בפרט לא איבר מינימלי ולכן קיים איבר כך ש. נמשיך בצורה הזו עד שנקבל סדרת איברים כך ש\*. \*\*לכל מתקיים . כיוון שמספר האיברים בקבוצה A חייב להיות סופי ז"א שקיימים שני איברים שווים בסדרה ונסמן . לפי \* מתקיים ש. כיוון ש מתקיים . לפי טענת העזר . נתון שזה יחס סדר חלקי ולכן לפי אנטי סימטריות של היחס S ולפי השורה הקודמת נקבל ז"א שקיבלנו  *וזה בסתירה ל\*\* ולכן ההנחה שאין איבר מינימלי שגויה.*

# תרגיל

עבור הקבוצה סמן בטבלה אם היחסים מקיימים את התכונות

## פתרון

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| יחס | אנטי סימטרי | טרנזיטיבי | סימטרי | רפלקסיבי |
|  | X | V | V | V |
|  | V | V | X | X |
|  | X | V | X | X |
|  | V | V | V | V |
|  | X | X | X | X |

# תרגיל

נתונה הקבוצה . נגדיר יחס R על A באופן הבא

## פתרון

פונקציות

פונק' f מעל קבוצה A היא התאמה המתאימה לכל איבר x בA עצם אחד ויחיד. הקבוצה עליה הפונק' מוגדרת נקראת התחום(Domain) של הפונ'. קבוצה B נקראת הטווח(Image) של הפונ' f אם מתקיים   
טווח של פונקציה לא בהכרח יחיד.  
אפשר לסמן

# דוגמה

האם הפונקציה חד חד ערכית? נניח ש. נניח ש ונראה אם לפי ההגדרה זה גורר :

*האם הפונקציה על? יהי y איבר בטווח, נראה שקיים מקור:*